

Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie

STEFAN GÖTZ (UNIV. WIEN)

Beim Kapitel „Analytische Geometrie“ in der Oberstufe werden oft abstrakte Problemstellungen ohne weiterführenden Kontext in den Blick genommen. Auf diese Weise kann die eigentliche Kraft der algebraischen Beschreibung von geometrischen Situationen den Schülerinnen und Schülern kaum vermittelt werden. Im Beitrag werden (zum Teil wohl-bekannte) Fragestellungen aus der ebenen Dreiecksgeometrie präsentiert, die die Schülerinnen und Schüler zum (auch eigenständigen) Begründen mit Mitteln der analytischen Geometrie anregen sollen. Eine standardisierte Lage eines allgemeinen Dreiecks im Koordinatensystem erweist sich dabei als fruchtbarer Ausgangspunkt für den Einsatz von Standardmethoden (!) der analytischen Geometrie im Mathematikunterricht.

1. Einleitung

In der neunten Schulstufe der AHS sieht der Lehrplan im Kapitel „Vektoren und analytische Geometrie in \mathbb{R}^2 “ folgende Kompetenzen vor¹:

- Vektoren addieren, subtrahieren, mit reellen Zahlen multiplizieren und diese Rechenoperationen geometrisch veranschaulichen können
- Einheitsvektoren und Normalvektoren ermitteln können
- Mit dem Skalarprodukt arbeiten können; den Winkel zwischen zwei Vektoren ermitteln können
- Geraden durch Parameterdarstellungen in \mathbb{R}^2 und durch Gleichungen (Normalvektordarstellungen) in \mathbb{R} beschreiben, Geraden schneiden und die gegenseitige Lage von Geraden ermitteln können
- Abstände ermitteln können (Punkt-Punkt, Punkt-Gerade)

In den gängigen Schulbüchern werden zu dieser Forderung zahlreiche Aufgaben gestellt, die — meist ohne geometrische Anschauung — algebraische Routinen bei den Schülerinnen und Schülern abrufen: Abb. 1 auf der nächsten Seite aus Götz & Reichel (2010a), S. 255. Dieser Aufsatz zeigt nun, wie diese Standardaufgaben mit Sinn erfüllt werden können, in dem sie aus geometrischen Situationen resultieren. Wir werden dazu einfache und auch komplexere Fragestellungen aus der (ebenen) Dreiecksgeometrie mit algebraischen Methoden behandeln. Das „bloße“ Nachrechnen erweist sich zusätzlich als eine mächtige Begründungsmethode, die ohne raffinierte „Tricks“, ohne kreative Einfälle auskommt. Das macht sie für eine breite Schüler- und Schülerinnenschicht zugänglich.

Ein wenig erinnert diese Vorgangsweise an das DESCARTES'sche Schema², das eine universelle Methode der Problemlösung vorstellte:

Erstens: Man reduziere jede Art von Problem auf ein *mathematisches* Problem.

Zweitens: Man reduziere jede Art von mathematischem Problem auf ein *algebraisches* Problem.

Drittens: Man reduziere jedes algebraische Problem auf die *Lösung einer einzigen Gleichung*.

(Pólya (1966), S. 47, Hervorhebung S. G.)

Wir werden also Problemstellungen aus der EUKLID'schen (Dreiecks-)Geometrie (zum Teil aus der Sekundarstufe I) allgemein analytisch beschreiben („koordinatisieren“) und dann (direkt, ohne Umwege!)

Ich danke Kollegen Franz Hofbauer (Wien) für die diesem Aufsatz zugrundeliegenden Ideen.

¹ Online: https://www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblAuth/BGBLA_2016.II.219/BGBLA_2016.II.219.pdf (Zugriff: 30.05.2017)

² RENÉ DESCARTES (1596 – 1650)

936	Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h und die Größe des Schnittwinkels!
a	g: $X = (3 3) + t \cdot (3 -3)$ h: $X = (2 0) + s \cdot (1 -3)$ b
c	g: $X = (2 -1) + t \cdot (3 -2)$ h: $X = (1 1) + s \cdot (1 -1)$ d
	g: $X = (2 -1) + t \cdot (3 -2)$ h: $X = (1 0) + s \cdot (1 -1)$ g: $X = (-1 3) + t \cdot (4 1)$ h: $X = (1 0) + s \cdot (3 -1)$
937	Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunktes der Trägergeraden g und h der Strecken AB und CD und die Größe des Schnittwinkels!
a	g: A(-1 3), B(3 4) h: C(-2 4), D(2 0) b
c	g: A(-5 10), B(-2 -2) h: C(-4 6), D(5 -3) d
	g: A(-3 2), B(-1 -6) h: C(-3 5), D(2 0) g: A(2 -1), B(-13 9) h: C(2 0), D(-5 7)
938	Ermittle mit den Angaben von Aufg. 938 1 graphisch, 2 rechnerisch, ob die Strecken AB und CD einander schneiden! 3 In welchem Teilverhältnis teilt der Schnittpunkt (der Trägergeraden) die Strecken AB und CD?
939	Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Lage der Geraden g zum Koordinatensystem! In welchem Abstand vom Ursprung schneidet die Gerade jede der Koordinatenachsen? Welchen Abstand hat g vom Ursprung?
a	g: $X = (3 6) + t \cdot (3 -3)$ b
e	g: $X = (1 -5) + t \cdot (-1 -1)$ f
	g: $X = (2 3) + t \cdot (2 -3)$ c
	g: $X = (1 6) + t \cdot (1 -3)$ g
	g: $X = (7 10) + t \cdot (0 5)$ d
	g: $X = (6 -4) + t \cdot (3 -2)$ h
	g: $X = (3 -2) + t \cdot (-3 -2)$ h
	g: $X = (6 -2) + t \cdot (3 -1)$
940	Die Geraden a, b und c sind die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, die Längen der Höhen und den Umfang! 3 Liegt ein besondere Dreieck vor?
a	a: $X = (-1 0) + r \cdot (1 -4)$, b: $X = (8 -4) + s \cdot (-5 4)$, c: $X = (0 -4) + t \cdot (3 4)$
b	a: $X = (-6 1) + r \cdot (12 -5)$, b: $X = (3 0) + s \cdot (-3 4)$, c: $X = (2 5) + t \cdot (-4 -2)$
c	a: $X = (0 -1) + r \cdot (5 2)$, b: $X = (8 0) + s \cdot (6 -2)$, c: $X = (-1 3) + t \cdot (4 6)$
d	a: $X = (-1 3) + r \cdot (5 0)$, b: $X = (6 2) + s \cdot (2 -3)$, c: $X = (-10 -4) + t \cdot (8 3)$
941	Die vier Geraden a, b, c und d sind die Trägergeraden der Seiten eines Vierecks. Ermittle 1 graphisch, 2 rechnerisch die Koordinaten der Eckpunkte, den Umfang, alle Winkel und den Typ des Vierecks!
a	a: $X = (0 4) + r \cdot (1 2)$, b: $X = (7 -2) + s \cdot (2 -1)$, c: $X = (7 3) + t \cdot (1 2)$, d: $X = (-7 0) + u \cdot (-2 1)$
b	a: $X = (3 5) + r \cdot (1 1)$, b: $X = (4 2) + s \cdot (1 5)$, c: $X = (7 1) + t \cdot (3 -1)$, d: $X = (0 -2) + u \cdot (-3 1)$
c	a: $X = (-1 -2) + r \cdot (-3 1)$, b: $X = (3 0) + s \cdot (1 3)$, c: $X = (0 3) + t \cdot (2 0)$, d: $X = (2 7) + u \cdot (3 4)$
d	a: $X = (1 -6) + r \cdot (-2 3)$, b: $X = (5 1) + s \cdot (3 2)$, c: $X = (3 4) + t \cdot (3 2)$, d: $X = (0 2) + u \cdot (2 -3)$
e	a: $X = (-4 -1) + r \cdot (1 1)$, b: $X = (1 1) + s \cdot (2 -1)$, c: $X = (5 1) + t \cdot (2 1)$, d: $X = (1 -4) + u \cdot (1 -1)$
f	a: $X = (6 2) + r \cdot (5 -1)$, b: $X = (1 3) + s \cdot (-1 5)$, c: $X = (7 -3) + t \cdot (5 -1)$, d: $X = (-3 -1) + u \cdot (1 -5)$
g	a: $X = (7 -2) + r \cdot (-3 3)$, b: $X = (-2 1) + s \cdot (3 1)$, c: $X = (-5 0) + t \cdot (3 -2)$, d: $X = (-1 -1) + u \cdot (-3 -1)$
h	a: $X = (1 1) + r \cdot (3 1)$, b: $X = (5 -1) + s \cdot (-1 3)$, c: $X = (6 6) + t \cdot (3 1)$, d: $X = (-1 -3) + u \cdot (-1 3)$

Abb. 1: Eine typische Aufgabenplantage

„nachrechnen“. Das ist die Kernidee und auch eine Grundidee der Geometrie. Den Rahmen bilden mögliche Explorationsmittel mittels dynamischer Geometriesoftware (DGS). Sie sind der Ausgangspunkt sinnvoller Rechnungen [auch mit Computeralgebrasystemen (CAS)], die zu einer Erkenntnisgewinnung durch Operieren und so zu einem für den Unterricht geeigneten Mittel zur eigenständigen Generierung von mathematischen Begründungen führen.

2. Ein standardisiertes Dreieck

2.1. Die Ausgangsposition

In Abb. 2 auf der nächsten Seite ist ein allgemeines Dreieck zu sehen, das in bestimmter Weise in ein kartesisches Koordinatensystem gesetzt wird: Der Eckpunkt A hat die Koordinaten $(u|0)$, der Eckpunkt B hat die Koordinaten $(v|0)$ und der Eckpunkt C schließlich hat die Koordinaten $(0|w)$. Dabei gilt $u < v$ und $w > 0$ (vgl. Götz & Hofbauer (2012), S. 325). Es ist leicht einzusehen, dass jedes Dreieck in solch eine Lage gebracht werden kann, eventuell muss der Eckpunkt C an der x-Achse gespiegelt werden. Zu beachten ist, dass die Vorzeichen von u und v nicht ungleich sein müssen wie in Abb. 2 auf der nächsten Seite, einzig $u < v$ muss erfüllt sein. Zum „Aufwärmen“ werden wir nun den (Ecken-)Schwerpunkt eines Dreiecks näher betrachten.

2.2. Die populären merkwürdigen Punkte im Dreieck

Die Existenz des Schwerpunkts eines Dreiecks kann auf verschiedene Weise begründet werden: elementargeometrisch mit dem Satz vom *Mittendreieck* (vgl. Krauter (2005), S. 65 f.), mit *koordinatenfreien*

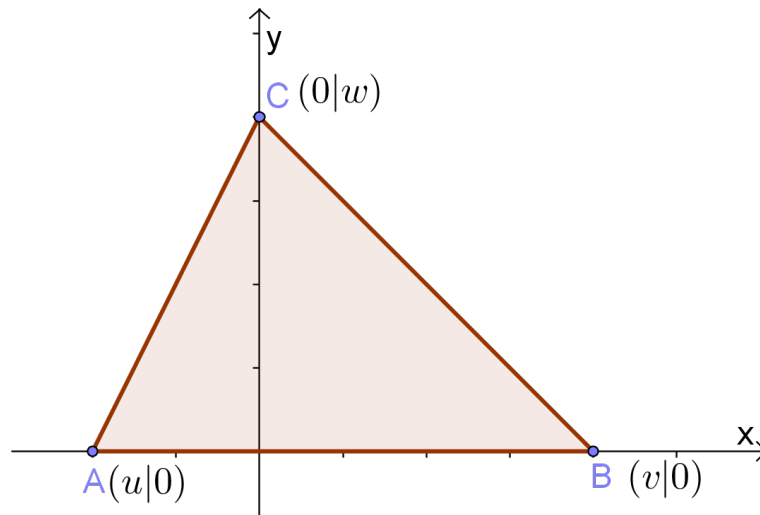


Abb. 2: Ein allgemeines Dreieck

Vektoren (vgl. Götz & Reichel (2010b), S. 17), mittels *Flächenvergleichs* (vgl. Reichel & Humenberger (2012), S. 231) oder mit dem Satz von CEVA (z. B. in Krauter (2005), S. 163).

Am einfachsten aber kann sie mittels Rechnens nachgewiesen werden, in dem wir einfach den Schnitt zweier Schwerelinien in die „*uvw*-Sprache“ übersetzen. In Abb. 3 sind die entsprechenden Punkte (Mittelpunkte M_{AB} und M_{BC} der Dreiecksseiten AB und BC) eingezeichnet.

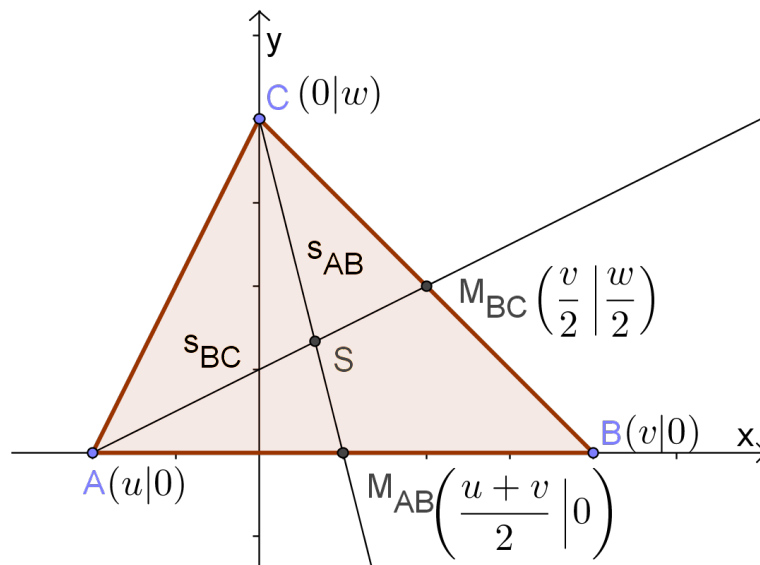


Abb. 3: Der Schwerpunkt S in der *uvw*-Sprache

Daraus lesen wir die Parameterdarstellungen

$$s_{AB}: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ -w \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_{BC}: \vec{X} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} \frac{v}{2} - u \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$$

der beiden Schwerelinien s_{AB} (geht durch den Eckpunkt C) und s_{BC} (geht durch den Eckpunkt A) ab. Die Gleichung der y -Koordinaten liefert den Parameterzusammenhang $\lambda = 2 \cdot (1 - t)$. Einsetzen in die Gleichung für die x -Koordinaten bringt $t = \frac{2}{3}$. Auch der andere Parameter λ hat den Wert $\frac{2}{3}$. Der Schwerpunkt S (wenn es ihn gibt) teilt also die „Schwerelinie“ (den Streckenabschnitt innerhalb des Dreiecks) im Verhältnis $2 : 1$. Der Schnittpunkt S hat schließlich (natürlich) die Koordinaten $S\left(\frac{u+v}{3} \mid \frac{w}{3}\right)$.

Die dritte Schwerelinie s_{AC} : $\vec{X} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{u}{2} - v \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix}$ (wegen $M_{AC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$) (Bezeichnungen sinngemäß wie eben) enthält $S \left(\frac{u+v}{3} \mid \frac{w}{3} \right)$: eine Standardrechnung ergibt $r = \frac{2}{3} = t = \lambda$ (Götz & Süss-Stepancik (2015), S. 312 f.).

Analog erweitern wir unser „ uvw -Vokabelheft“ (Götz & Hofbauer (2012), S. 326):

1. der *Umkreismittelpunkt* U hat die Koordinaten $\left(\frac{u+v}{2} \mid \frac{w}{2} + \frac{uv}{2w} \right)$, und
2. der *Höhenschnittpunkt* $H \left(0 \mid -\frac{uv}{w} \right)$.

2.3. Die EULER'sche Gerade

Die Ergebnisse von Abschnitt 2.2. führen geradewegs zur EULER'schen³ Geraden. Wir bilden dazu (ökonomisch) die Gerade e durch H und S : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{uv}{w} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} \frac{u+v}{3} \\ \frac{w}{3} + \frac{uv}{w} \end{pmatrix}$ und versichern uns, dass $U \in e$ gilt, indem wir $\mu = \frac{3}{2}$ für die x - und y -Koordinate ermitteln (Götz & Süss-Stepancik (2015), S. 313). Damit sind auch die Abstandsverhältnisse der Punkte H , S und U zueinander klar: $|HS| : |SU| = 2 : 1$ bzw. S teilt die Strecke HU im Verhältnis $2 : 1$ (Abb. 4).

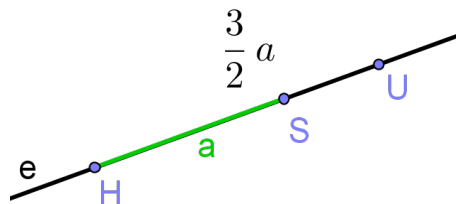


Abb. 4: EULER'sche Gerade (Ausschnitt)

Bemerkung: Die durch die uvw -Sprache suggerierte Wahl der Punkte für Geradengleichungen erleichtert die Interpretation.

2.4. Übungsmöglichkeiten für die Selbsttätigkeit

Wir betrachten in diesem Abschnitt Spezialfälle von Dreiecken, um die Eigentätigkeit der Schülerinnen und Schüler anzuregen. Ist das Dreieck ABC *rechtwinkelig*, so setzen wir z. B. $u = 0$, das heißt der rechte Winkel befindet sich beim Eckpunkt $A(0|0)$: Abb. 5 auf der nächsten Seite.

Für den Schwerpunkt S ergibt sich nun $\left(\frac{v}{3} \mid \frac{w}{3} \right)$ (vgl. Abschnitt 2.2.), das können wir als möglicher Standpunktwechsel (vgl. Wittmann (2009), S. 131) zur Integralrechnung in der zwölften Schulstufe der AHS verifizieren. Dazu benutzen wir die funktionale Abhängigkeit $y = -\frac{w}{v} \cdot x + w$ für die (Trägergerade der) Seite BC des Dreiecks und berechnen

$$\xi = \frac{\int_0^v xy \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \frac{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x^2 + wx \right) dx}{\int_0^v \left(-\frac{w}{v}x + w \right) dx} = \dots = \frac{v}{3} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^v y^2 \, dx}{\int_0^v y \, dx} = \dots = \frac{w}{3}$$

gemäß der Formeln in Götz & Reichel (2013), S. 103 f.

Weitere Übungs- und Interpretationsmöglichkeiten ergeben sich aus den Koordinaten des Umkreismittelpunkts U : $\left(\frac{v}{2} \mid \frac{w}{2} \right)$ (Abb. 5 auf der nächsten Seite). Das ist gleichzeitig der Mittelpunkt der Strecke BC , woraus sofort der THALESkreis folgt. Der Höhenschnittpunkt $H (0|0)$ fällt nun mit dem Eckpunkt A zusammen (Abb. 5 auf der nächsten Seite). (Vgl. Abschnitt 2.2. und Götz & Süss-Stepancik (2015), S. 313.)

³ LEONHARD EULER (1707 – 1783)

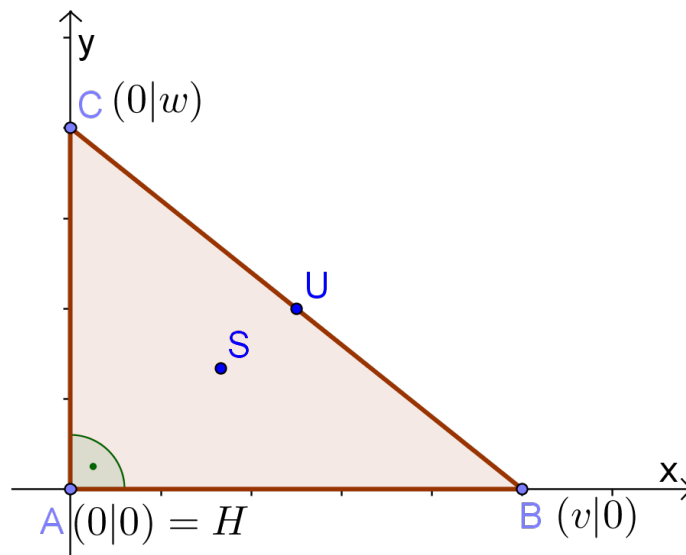


Abb. 5: Rechtwinkeliges Dreieck in der uvw -Sprache: $u = 0$

Ist das Dreieck ABC *gleichschenkelig*, so können wir z. B. $u = -v$ festsetzen: Abb. 6. Gemäß der Formeln aus Abschnitt 2.2. erhalten wir für den Schwerpunkt S die Koordinaten $\left(0 \mid \frac{w}{3}\right)$, für den Umkreismittelpunkt $U \left(0 \mid \frac{w}{2} - \frac{v^2}{2w}\right)$ und für den Höhenschnittpunkt $H \left(0 \mid \frac{v^2}{w}\right)$. Mit Abb. 6 ist der Wert der y -Koordinate von S leicht nachzuvollziehen: $\frac{w}{2} : \frac{3v}{2} = y_S : v$.

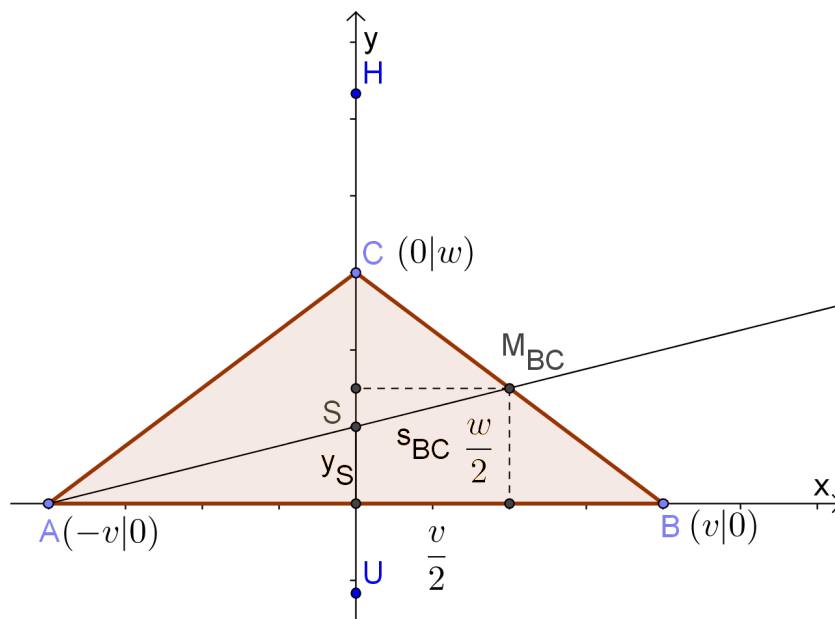


Abb. 6: Gleichschenkeliges Dreieck

Last but not least ist die EULER'sche Gerade nun die y -Achse.

Wir ziehen zum Abschluss zwei Folgerungen aus dem gleichschenkeligen Fall. Erstens betrachten wir *gleichschenkelig rechtwinkelige* Dreiecke wie in Abb. 7 auf der nächsten Seite links. Für ein solches Dreieck ABC , welches rechtwinkelig bei C ist und wo die Seiten AC und BC gleich lang sind, ist der Schwerpunkt S in $\left(0 \mid \frac{v}{3}\right)$ zu finden, der Umkreismittelpunkt U in $(0|0)$ und der Höhenschnittpunkt H in $(0|v) = C$ (vgl. wieder Abschnitt 2.2.). Dabei ist $u = -v$ und $w = v$.

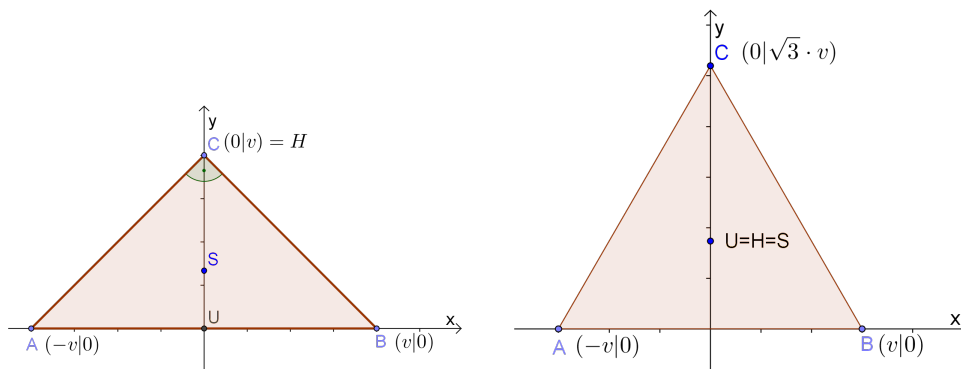


Abb. 7: Gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck links und gleichseitiges Dreieck rechts

Für ein *gleichseitiges* Dreieck ABC zweitens (Abb. 7 rechts) ergeben sich aus Abschnitt 2.2. mit $u = -v$ und $w = v\sqrt{3}$ die Koordinaten $\left(0 \mid \frac{v}{\sqrt{3}}\right)$ für den Schwerpunkt S , $\left(0 \mid \frac{v}{\sqrt{3}}\right)$ für den Umkreismittelpunkt U und $\left(0 \mid \frac{v}{\sqrt{3}}\right)$ für den Höhenschnittpunkt H . Wie erwartet fallen diese drei Punkte für ein solches Dreieck zusammen.

3. Die JOHNSON-Kreise

3.1. Drei Kreise

In Müller (2013) findet sich auf Seite 49 eine Maturaufgabe aus dem Jahr 2012: Abb. 8. Die dort in Rede stehenden Kreise sind nach ROGER A. JOHNSON (1890 – 1954) benannt. Sie gehen jeweils durch zwei Eckpunkte eines Dreiecks, haben den gleichen Radius und schneiden einander in einem Punkt. Laut Abb. 8 ist das der Höhenschnittpunkt H des Dreiecks. Weiters ist das aus den Mittelpunkten der JOHNSON-Kreise gebildete Dreieck, das JOHNSON-Dreieck, kongruent zum ursprünglichen Dreieck.

3.) Unter den Johnson-Kreisen eines Dreiecks versteht man drei Kreise mit gleichem Radius, die durch jeweils zwei Eckpunkte des Dreiecks gehen und einen Punkt gemeinsam haben (siehe nebenstehende Skizze). Das von den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 dieser Kreise gebildete Dreieck wird als Johnson-Dreieck bezeichnet.

a) Zeige, dass die Kreise k_1, k_2 und k_3 die Johnson-Kreise des Dreiecks ABC sind.
 b) Verifiziere, dass der gemeinsame Punkt der Johnson-Kreise der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.
 c) Das Dreieck ABC und das Johnsondreieck $M_1M_2M_3$ sind kongruent. Beweise diese Behauptung!

$A(-7|-4), B(8|-1), C(-4|7)$
 $k_1: x^2 + y^2 - 8x - 12y = 13 \quad k_2: [M_2(-11/3), r = \sqrt{65}]$
 $k_3: (x-1)^2 + (y+5)^2 = 65$

Abb. 8: Eine Maturaufgabe in Wien 2012

Nun wollen wir diesen Behauptungen mit der uvw -Sprache ein wenig auf den Zahn fühlen. Wir berechnen dazu einen ersten JOHNSON-Kreis durch B, C und H des Dreiecks ABC : Abb. 9 auf der nächsten Seite. Diese Aufgabe passt im Sinne des Spiralprinzips in die elfte Schulstufe der AHS. Mit $H\left(0 \mid -\frac{uv}{w}\right)$ aus Abschnitt 2.2. stellen wir also folgendes Gleichungssystem auf (wir gehen dabei davon aus, dass H

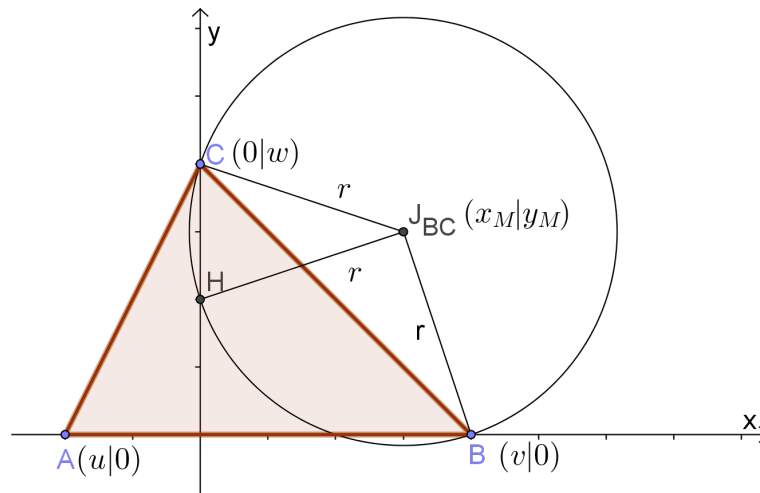


Abb. 9: JOHNSON-Kreis durch B , C und H

nicht in einer Ecke des Dreiecks liegt, siehe auch Abschnitt 3.3.):

$$\begin{aligned} (v - x_M)^2 + y_M^2 &= r^2 \\ x_M^2 + (w - y_M)^2 &= r^2 \\ x_M^2 + \left(-\frac{uv}{w} - y_M\right)^2 &= r^2, \end{aligned}$$

welches diese Lösungen mit sich bringt: $x_M = \frac{v-u}{2}$, $y_M = \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w}$ und $r^2 = \frac{u^2+v^2}{4} + \frac{w^4+u^2v^2}{4w^2}$. Dabei sind $(x_M|y_M)$ die Koordinaten des Mittelpunkts J_{BC} des JOHNSON-Kreises durch B , C und H , und r ist sein Radius (Abb. 9). Das letzte Resultat ist bekannt: r ist der Umkreisradius des Dreiecks ABC (Götz & Hofbauer (2012), S. 326).

Alle drei JOHNSON-Kreise mit den Koordinaten ihrer Mittelpunkte J_{AB} , J_{BC} und J_{AC} sind in Abb. 10 auf der nächsten Seite zu sehen. Jeder geht durch je zwei Eckpunkte des Dreiecks, sie haben alle denselben Radius r und schneiden einander in einem Punkt, nämlich im Höhenschnittpunkt des Dreiecks. Die Rechnungen sind analog zur eben gezeigten. Außerdem stellen wir mit Hilfe von Abb. 10 auf der nächsten Seite fest, dass der gemeinsame Punkt der Kreise der Umkreismittelpunkt des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{BC}J_{AC}$ sein muss.

3.2. Das JOHNSON-Dreieck

Ein neuerlicher Standpunktwechsel nimmt das JOHNSON-Dreieck $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ aus dem vorigen Abschnitt unter die Lupe: nochmals Abb. 10 auf der nächsten Seite. Die Dreiecke ABC und $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$ sind kongruent:

Die Vektoren $\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} v \\ -w \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J_{BC}J_{AB}} = \begin{pmatrix} u \\ -w \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{J_{BC}J_{AC}} = \begin{pmatrix} u-v \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzen die Längen $|\overrightarrow{J_{AC}J_{AB}}| = \sqrt{v^2 + w^2} = a$, $|\overrightarrow{J_{BC}J_{AC}}| = |u - v| = c$ und $|\overrightarrow{J_{BC}J_{AB}}| = \sqrt{u^2 + w^2} = b$. Dabei ist a die Länge der Dreiecksseite BC , b jene von AC und c die von AB in Abb. 2 auf Seite 11. Nach dem Seiten-Seiten-Seiten-Satz (ein Beweis findet sich in Krauter (2005), S. 63 f.) ist damit alles gezeigt.

Greifen wir die Einsicht auf, dass der gemeinsame Punkt der JOHNSON-Kreise einerseits der Höhenschnittpunkt H des ursprünglichen Dreiecks ABC ist, andererseits aber der Umkreismittelpunkt U des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{BC}J_{AC}$ (Abschnitt 3.1.), dann vermuten wir eine Dualität:

1. Die Höhenlinien des Dreiecks ABC sind die Streckensymmetralen der Seiten des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$.

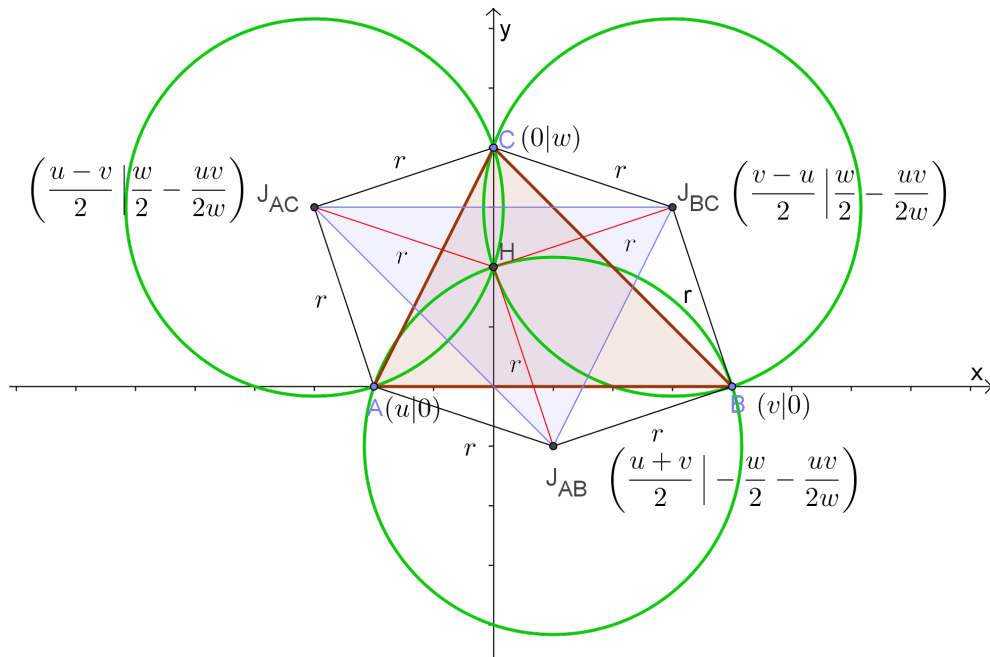


Abb. 10: JOHNSON-Kreise durch Ecken A, B, C und Höhenschnittpunkt H mit Radius r

2. Die Streckensymmetralen der Seiten des Dreiecks ABC sind die Höhenlinien des JOHNSON-Dreiecks $J_{AB}J_{AC}J_{BC}$.

Abb. 11 erhärtet diese Vermutung, die wir allerdings noch nachrechnen (und damit beweisen!) müssen (vgl. Götz & Süß-Stepancik (2015), S. 314).

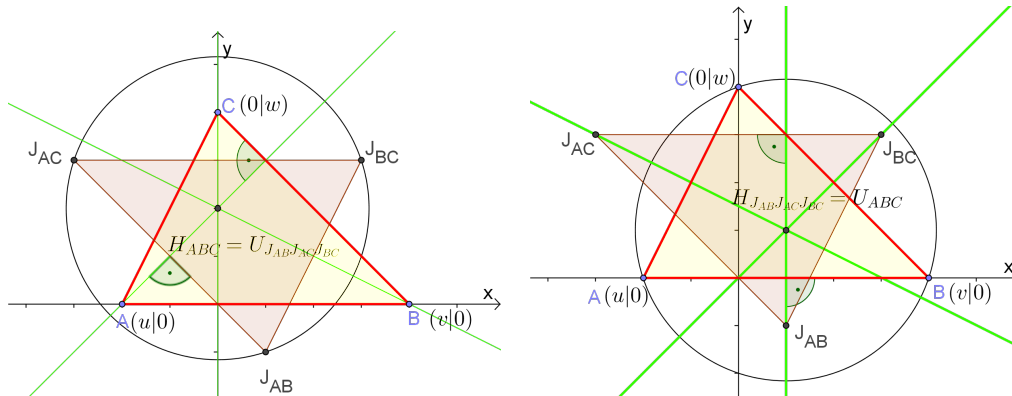


Abb. 11: H entspricht U und vice versa

Dazu beschreiben wir erstens die Höhenlinie durch C mittels der Gleichung $x = 0$. Das war einfach. Die Streckensymmetrale der Dreiecksseite $J_{AC}J_{BC}$ steht senkrecht auf diese und geht durch ihren Mittelpunkt: $\frac{1}{2} \cdot (J_{AC} + J_{BC}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ w - \frac{uv}{w} \end{pmatrix}$. Ein Normalvektor auf die Strecke $J_{AC}J_{BC}$ ist z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ v - u \end{pmatrix}$, wie aus Abb. 10 ablesbar ist. Somit stimmen die Höhenlinie durch C und die Streckensymmetrale der Seite $J_{AC}J_{BC}$ überein, in beiden Fällen ist das die y -Achse. Analog kann jeweils eine Identität für die anderen Geradenpaare gezeigt werden.

Zweitens lautet eine Parameterdarstellung der Streckensymmetrale der Dreiecksseite BC folgendermaßen: $\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} \\ \frac{w}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \frac{w}{v} \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Höhenlinie durch J_{BC} kann mittels $\vec{X} = \begin{pmatrix} \frac{v-u}{2} \\ \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w} \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$ beschrieben werden (Abb. 10). Dabei entsteht ihr Richtungsvektor als Normalvektor auf den Vektor $\overrightarrow{J_{AB}J_{AC}}$

(siehe oben in diesem Abschnitt!). Nun überzeugen wir uns, dass der Mittelpunkt der Strecke BC auf der Höhenlinie durch J_{BC} liegt, denn ihre Richtungsvektoren sind ja parallel zueinander wie man unschwer erkennen kann: Aus der Gleichung $\frac{v}{2} = \frac{v-u}{2} + \gamma \cdot w$ für die x -Koordinaten folgt für den Parameter $\gamma = \frac{u}{2w}$. Die Gleichung $\frac{w}{2} = \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w} + \gamma \cdot v$ für die y -Koordinaten liefert ebenfalls $\gamma = \frac{u}{2w}$. Auch hier können analoge Resultate für die anderen beiden Geradenpaare nachgerechnet werden.

Insgesamt sind damit die beiden obigen Entsprechungen gezeigt.

3.3. Reflexion der JOHNSON-Kreise

Satz 1 *Der an den Seiten gespiegelte Höhenschnittpunkt liegt am Umkreis eines Dreiecks: Abb. 12.*

Dies kann auch mit der uvw -Sprache bewiesen werden: Götz & Hofbauer (2012), S. 326, konventionell z. B. in Krauter (2005), S. 75 und S. 96 f. Damit ist klar, dass der Höhenschnittpunkt der gemeinsame

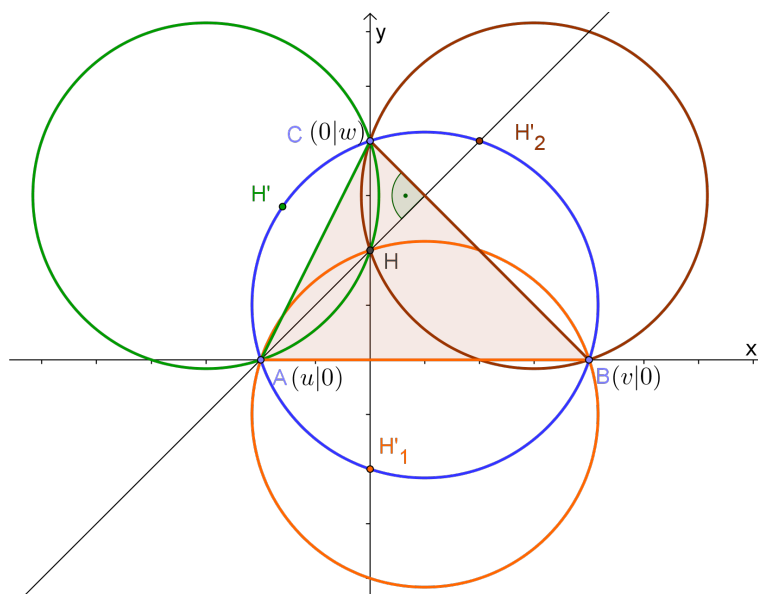


Abb. 12: Dreimal gespiegelter Höhenschnittpunkt und JOHNSON-Kreise

Punkt der JOHNSON-Kreise sein muss. Spiegelt man nämlich den ganzen Umkreis an den drei Seiten des zugehörigen Dreiecks, dann müssen die gespiegelten Kreise durch jeweils zwei Ecken des Dreiecks gehen und ihr Radius ist natürlich der Umkreisradius des Dreiecks. Wegen Satz 1 und aus Symmetriegründen muss der Höhenschnittpunkt auf allen drei gespiegelten Kreisen liegen.

... und wenn H schon auf dem Umkreis liegt? — Wann passiert das? Und was passiert dann? Betrachten wir die Umkreisgleichung des Dreiecks ABC genauer:

$$\left(x - \frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{w}{2} - \frac{uv}{2w}\right)^2 = \frac{u^2 + v^2}{4} + \frac{w^4 + u^2v^2}{4w^2}$$

und setzen $H\left(0 \mid -\frac{uv}{w}\right)$ ein (dabei haben wir Ergebnisse aus den Abschnitten 2.2. und 3.1. verwendet). Nach einigen (Äquivalenz-)Umformungen erhalten wir daraus die (bemerkenswerte) Gleichung

$$uv + \frac{u^2v^2}{w^2} = 0.$$

Sie hat drei „Lösungen“: $u = 0$ oder $v = 0$ oder $uv = -w^2$. Die Interpretation derselben ist: Das Dreieck ABC ist jedenfalls rechtwinkelig! Genau dann liegt der Höhenschnittpunkt auf dem Umkreis, das ist dann bekanntlich der THALESkreis. Abb. 13 auf der nächsten Seite zeigt die drei Situationen. Die ersten beiden Fälle sind aufgrund der definierten Lage des Dreiecks (Abschnitt 2.1.) unmittelbar evident: je zwei

Dreiecksseiten liegen auf der x - bzw. y -Achse und stehen somit orthogonal aufeinander. Der dritte Fall ist ein besonderer: die algebraische Gleichung spricht zu uns, sie drückt eine Beziehung zwischen zwei Abschnitten einer Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe darauf aus. Die Umkehrung des Höhensatzes garantiert, dass ein Dreieck mit dieser Eigenschaft rechtwinkelig sein muss (ein Beweis findet sich z. B. in Fraedrich (1994), S. 13).

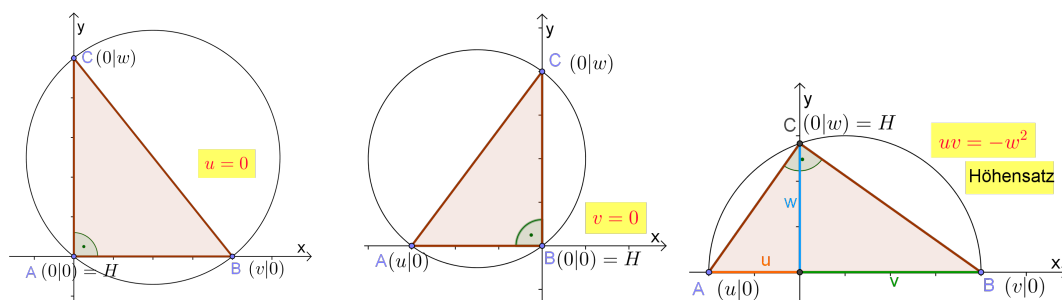


Abb. 13: Drei rechtwinkelige Dreiecke mit ihrem THALESkreis

Wir folgern daraus, dass in so einer Situation ein Kreis aus Abb. 12 auf der vorherigen Seite „verschwindet“: Ein JOHNSON-Kreis ist dann gleichzeitig der Umkreis und gleichzeitig der THALESkreis des (rechtwinkligen) Dreiecks. Der gemeinsame Punkt der drei Kreise bleibt der Höhenschnittpunkt, er wandert in den Eckpunkt, wo der rechte Winkel ist.

4. Resümee

4.1. Unterrichtspraktisches Resümee

Wir haben nur Standardthemen der Vektorrechnung im \mathbb{R}^2 bearbeitet: Parameterform einer Geraden, Schnitt zweier Geraden, Inzidenzfragen und die Kreisgleichung. Es geht nun letztlich darum, eine Haltung bei den Schülerinnen und Schülern zu indizieren, die damit verbundenen Standardmethoden auch einzusetzen. Die Interpretationen der Ergebnisse mit Hilfe des gegebenen Kontextes „Dreiecksgeometrie“ führt zu einem Sinnangebot alternativ zu den eingangs erwähnten Aufgabenplantagen (Abb. 1 auf Seite 10). Schüler und Schülerinnen sind angehalten, ihre Ergebnisse zu dokumentieren: „Was habe ich gezeigt?“ Dabei unterstützt die Anschauung bei der Suche nach Interpretationen und hilft auch bei deren Prüfung.

Als Vorübung oder als Differenzierungsmöglichkeit in leistungsheterogenen Klassen können natürlich Aufgaben mit konkreten Belegungen für u , v und w eingesetzt werden. Dazu passt, herkömmliche Aufgaben in die uvw -Sprache zu übersetzen: vgl. Herget (2013), S. 465: „Die umgekehrte Aufgabe: Koordinatensystem gesucht!“

Apropos: wie funktioniert denn die eben angesprochene Übersetzung in die uvw -Sprache (vgl. auch Abschnitt 2.1.)? Gehen wir davon aus, die Seitenlängen a , b und c eines beliebigen Dreiecks zu kennen. Aus diesen wollen wir die Koordinaten u , v und w bestimmen. Mit Abb. 14 auf der nächsten Seite links erkennen wir

$$a^2 = v^2 + w^2, \quad b^2 = u^2 + w^2 \quad \text{und} \quad c = v - u$$

und erhalten daraus die Lösungen

$$u = \left(\frac{a^2 - b^2}{c} - c \right) \cdot \frac{1}{2}, \quad v = \left(\frac{a^2 - b^2}{c} + c \right) \cdot \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad w = \frac{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}}{2c}.$$

Interessant ist der Wurzelausdruck im Zähler von w . Ist der Ausdruck unter der Wurzel immer positiv? Das müsste er sein, denn wir haben ja behauptet, dass jedes Dreieck in der uvw -Sprache darstellbar ist.

Hierbei hilft der Kosinussatz weiter. In Abb. 14 auf der nächsten Seite rechts ist $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Dabei ist γ der Innenwinkel beim Eckpunkt C des Dreiecks. Daraus leiten wir $|\cos \gamma| = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} \leq 1$ ab,

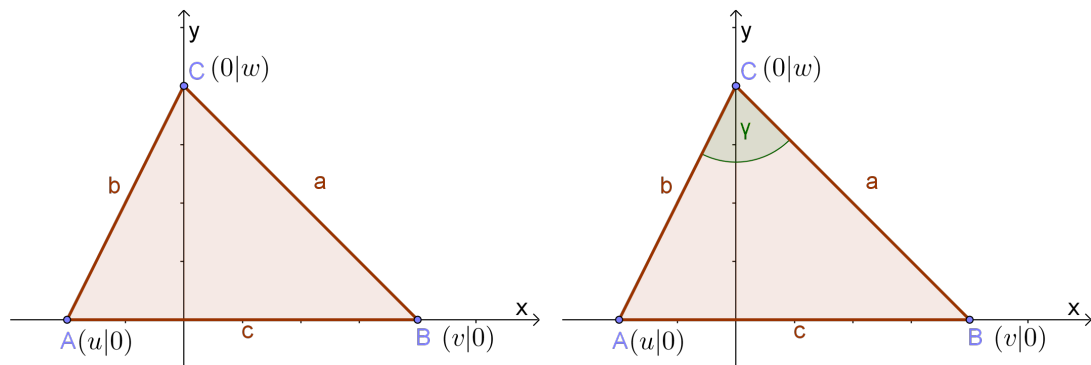


Abb. 14: Nochmals die Ausgangsposition

was uns zu $(a^2 + b^2 - c^2)^2 \leq 4a^2b^2$ führt. Damit gilt

$$a^4 + b^4 + c^4 \leq 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$$

in jedem Dreieck! Gleichheit bedeutet $w = 0$, das Dreieck ABC entartet zur Strecke AB (und der Winkel γ ist dann 180°).

4.2. Erkenntnistheoretisches Resümee

Die uvw -Sprache bringt den Erkenntnisgewinn und Begründungen durch Rechnen zustande. Ob damit auch Einsicht verbunden ist, bleibt die Frage. Überzeugen Rechnungen? Wie kann Überzeugung überhaupt gemessen werden, wie können Überzeugungen miteinander verglichen werden? Sind elementargeometrische Beweise beispielsweise Rechnungen in diesem Sinne überlegen? Sie arbeiten immerhin mit der Anschauung, allerdings variiert die Argumentationsbasis. Was einmal funktioniert hat, muss kein zweites Mal klappen. Bei der uvw -Sprache dagegen gibt das Kalkül die Regeln vor, sie bilden eine wohldefinierte Argumentationsbasis. Konkret kommen wir mit den Grundrechnungsarten aus, die allerdings mehr oder weniger komplexe geometrische Zusammenhänge beschreiben, die man wissen und anwenden muss. Das Vereinfachen der algebraischen Terme setzt geschickte, zielgerichtete Umformungen voraus. Auf diese Kompetenz sollte ja schon in der Unterstufe hingearbeitet werden, dort könnte im Sinne des Spiralprinzips dafür eine mit Sinn behaftete Grundlage gelegt werden.

Das Operieren mit Zeichen nach bestimmten Regeln ist hier also der Weg zum Erkenntnisgewinn, der in der geometrischen Interpretation endet. Es wird quasi in Zeichen gedacht (vgl. Dörfler (2015) und Abb. 15).

$$\begin{aligned} \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\frac{uv}{w} - \frac{w}{2}\right)^2 &= \frac{u^2v^2}{4} + \frac{w^4w^2}{4w^2} \\ \frac{uv}{2} + \frac{3}{4}\frac{u^2v^2}{w^2} + \frac{3}{2}uv + \frac{w^2}{4} &= \frac{w^2}{4} + \frac{u^2v^2}{4w^2} \\ 2uv + 2\frac{u^2v^2}{w^2} &= 0 \quad | :2uv \neq 0 \\ 1 + \frac{uv}{w^2} &= 0 \quad \downarrow \text{rechnen in beiden} \\ \frac{uv}{w^2} &= -1 \quad \downarrow \text{A} \quad \downarrow \text{B} \\ \frac{uv}{w^2} &= -1 \quad \downarrow \text{A} \quad \downarrow \text{B} \\ \frac{uv}{w^2} &= -1 \quad \downarrow \text{A} \quad \downarrow \text{B} \end{aligned}$$

Abb. 15: Rechnen mit der Hand

Natürlich gibt es auch Grenzen der Anwendbarkeit der uvw -Sprache. Wir haben mit ihr in Abschnitt 3.1. gezeigt, dass die JOHNSON-Kreise drei Bedingungen erfüllen: Sie gehen durch je zwei Ecken eines Dreiecks, haben denselben Radius und schneiden einander in einem Punkt. Aber es fehlt die Beantwortung der Frage nach der Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise! Sind das die einzigen drei Kreise, die die eben genannten Eigenschaften haben? Ein entsprechendes allgemeines Gleichungssystem für den gemeinsamen Radius r und den gemeinsamen Punkt $P(p|q)$ kann zwar aufgestellt werden, es ist jedoch auch mit Hilfe von MATHEMATICA nicht gelungen, dieses zu lösen, sodass die Koordinaten des Höhenschnittpunkts und der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC in uvw -Sprache als Ergebnis erhalten werden.

Ein Methodenwechsel ist also angesagt: angle chase („Winkel jagen“), der folgende Nachweis der Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise für spitzwinkelige Dreiecke stammt von FRANZ HOFBAUER (Wien). Abb. 16 zeigt die Situation mit dem Dreieck ABC und den Mittelpunkten J_{AB} , J_{BC} und J_{AC} von Kreisen, die die geforderten Eigenschaften erfüllen. Der Punkt S ist der gemeinsame Punkt der drei Kreise. Es sind drei Rauten (mit Seitenlänge r) zu sehen: $J_{AB}BJ_{BC}S$, $J_{BC}CJ_{AC}S$ und $J_{AC}AJ_{AB}S$. Wir betrachten in Abb. 16 den vollen Winkel bei S :

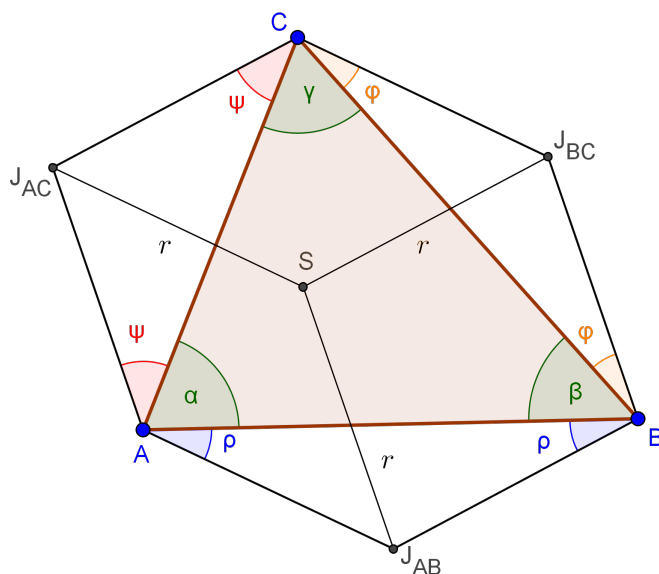


Abb. 16: Zur Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise

Daraus ist folgende Beziehung mit den Bezeichnungen aus Abb. 16 zu erkennen (α , β , γ sind die Innenwinkel im Dreieck ABC , ψ , ρ und ϕ sind die Basiswinkel der gleichschenkeligen auf die Dreiecksseiten aufgesetzten Dreiecke mit den Spitzen J_{AC} , J_{AB} und J_{BC}):

$$\begin{aligned} \alpha + \psi + \rho + \beta + \rho + \phi + \gamma + \phi + \psi &= 360^\circ \\ (\alpha + \beta + \gamma) + 2(\phi + \psi + \rho) &= 360^\circ \\ \phi + \psi + \rho &= 90^\circ \quad (*) \end{aligned}$$

Der Winkel bei J_{BC} im Dreieck BCJ_{BC} in Abb. 16 hat den Wert $[180^\circ - (\beta + \rho + \phi)] + [180^\circ - (\gamma + \phi + \psi)]$.

Die Winkelsumme in diesem Dreieck ist $360^\circ - (\beta + \gamma + 2\phi + \psi + \rho) + \phi + \phi = 180^\circ$.

Daraus folgt mit der Beziehung (*) von eben $180^\circ - (\beta + \gamma + \phi + 90^\circ) + 2\phi = 0$ und schließlich das Resultat $\phi = \beta + \gamma - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$.

Analog kann man $\psi = 90^\circ - \beta$ und $\rho = 90^\circ - \gamma$ ausrechnen. Diese Basiswinkel zu den Mittelpunkten der gesuchten Kreise sind also die Komplementärwinkel zu den gegenüberliegenden Innenwinkeln des Dreiecks ABC . Sie sind damit eindeutig festgelegt und daher ist die Eindeutigkeit der JOHNSON-Kreise bewiesen.

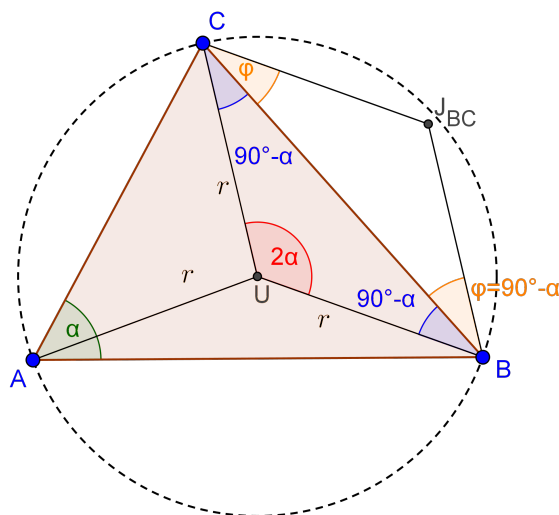


Abb. 17: (Um-)Kreis über der Sehne BC

Daraus ist eine Konstruktion von J_{BC} (und analog für die anderen beiden Mittelpunkte) ableitbar. Abb. 17 und der Peripheriewinkelsatz lehren uns, dass J_{BC} spiegelbildlich zum Umkreismittepunkt U des Dreiecks ABC liegt. Dabei passiert die Spiegelung an der Dreiecksseite BC .

5. Gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren

Die in diesem Abschnitt behandelten Ergebnisse sind alle aus Götz (2017).

5.1. Zwei Invarianten

Die Ausgangssituation zeigt Abb. 18 auf der nächsten Seite. Es werden gleichseitige Dreiecke auf die Seiten des Dreiecks ABC aufgesetzt. Es handelt sich also um die Dreiecke BCE , ACF und ABG . Wenn wir die Spitzen E , F und G dieser Dreiecke mit den gegenüberliegenden Eckpunkten A , B bzw. C verbinden, erhalten wir Ecktransversalen. Eine Exploration mittels DGS zeigt, dass die Längen der Strecken AE , BF und CG gleich sind: Abb. 18 auf der nächsten Seite. Das wollen wir nachrechnen.

Die Koordinaten der Aufsatzspitze E zu bestimmen ist eine einfache Standardaufgabe in der fünften Klasse AHS: Abb. 19 auf der nächsten Seite. Der Ortsvektor zum Mittelpunk M_{BC} der Strecke BC ist $\vec{M}_{BC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$ und ein Normalvektor derselben ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix}$. Damit berechnen wir

$$\vec{E} = \vec{M}_{BC} + \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2 + w^2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{v^2 + w^2} \quad \text{und schließlich} \quad E \left(\frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} \mid \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \right).$$

Analoge Rechnungen ergeben die Koordinaten der anderen Spitzen: Abb. 20 auf Seite 23.

Nun berechnen wir die Koordinaten von $\vec{AE} = \begin{pmatrix} \frac{v}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - u \\ \frac{w}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{v}{2} \end{pmatrix}$. Wenn wir jetzt die Länge des Richtungsvektors \vec{AE} ausrechnen, erhalten wir für ihr Quadrat

$$|\vec{AE}|^2 = \left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2}\sqrt{3} - u \right)^2 + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2}\sqrt{3} \right)^2 = u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3} \cdot w(v - u).$$

Analoge Rechnungen ergeben mit $\vec{BF} = \begin{pmatrix} \frac{u}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2} - v \\ \frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2} \end{pmatrix}$ und $\vec{CG} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w \end{pmatrix}$ dasselbe Resultat. Insgesamt handelt es sich also um eine Standardaufgabe im Mathematikunterricht der neunten Schulstufe AHS.

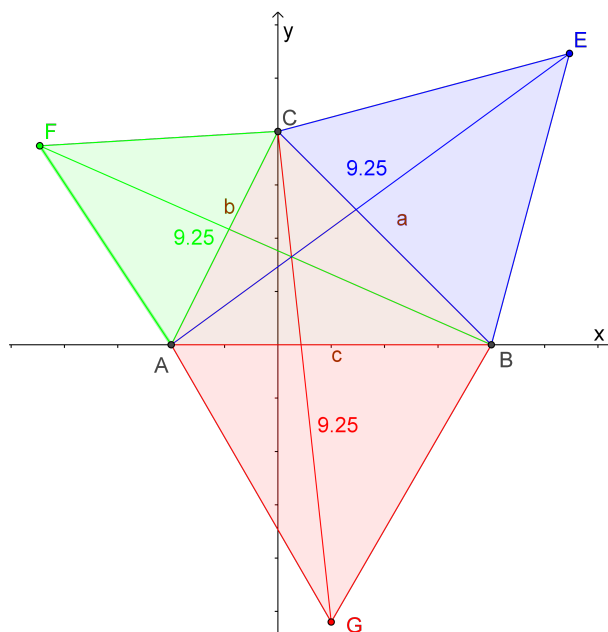


Abb. 18: Drei gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren und eine Invariante

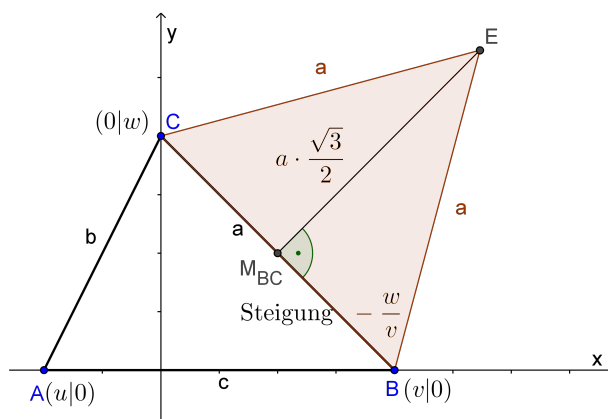


Abb. 19: Zur Bestimmung der Koordinaten der Spitze E

Auch die Winkel zwischen den Ecktransversalen sind gleich und konstant: sie betragen für jedes Dreieck 60° bzw. 120° , wie man mit DGS vermuten kann: Abb. 21 auf Seite 24.

Wegen

$$\frac{\vec{AE} \cdot \vec{BF}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{BF}|} = \frac{\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2} \cdot \sqrt{3} - u\right) \cdot \left(\frac{u}{2} - v - \sqrt{3} \cdot \frac{w}{2}\right) + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\frac{w}{2} - \sqrt{3} \cdot \frac{u}{2}\right)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)} = -\frac{1}{2}$$

ist der Winkel zwischen AE und BF gleich 60° bzw. 120° .

Dasselbe Resultat ergibt sich bei

$$\frac{\vec{AE} \cdot \vec{CG}}{|\vec{AE}| \cdot |\vec{CG}|} = \frac{\left(\frac{v}{2} + \frac{w}{2} \cdot \sqrt{3} - u\right) \cdot \frac{u+v}{2} + \left(\frac{w}{2} + \frac{v}{2} \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} - w\right)}{u^2 + v^2 + w^2 - uv + \sqrt{3}w(v-u)}$$

Damit muss auch der Winkel zwischen BF und CG 60° bzw. 120° sein.

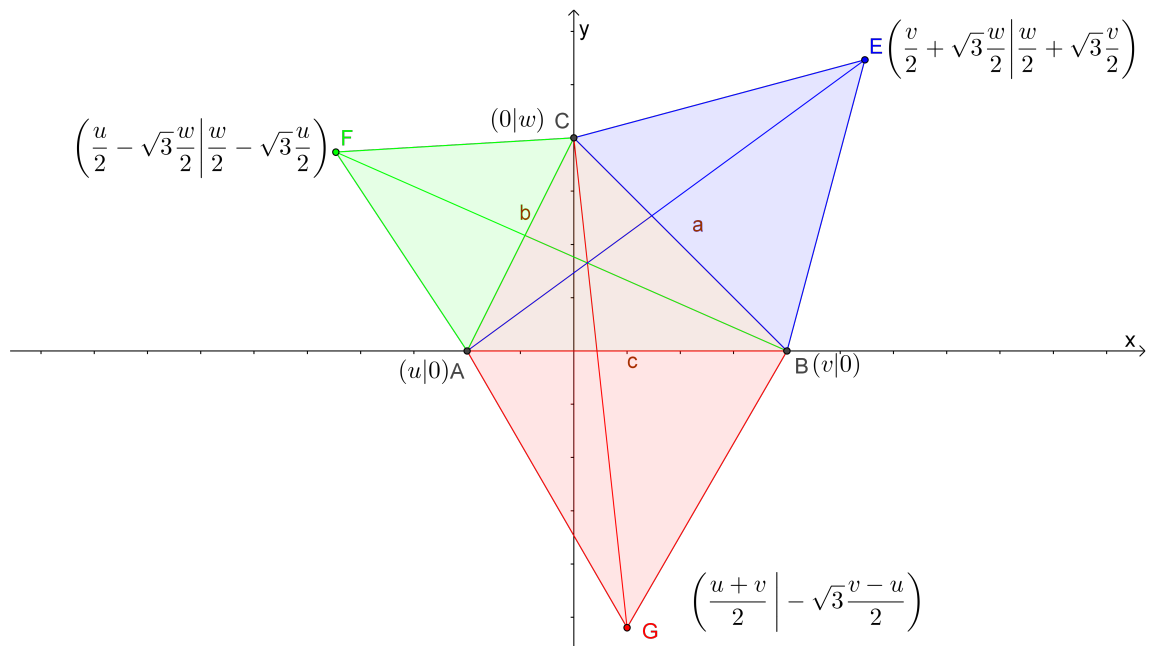


Abb. 20: Die Koordinaten der Spitzen E , F und G

Das ist eine weitere Standardaufgabe des Lehrplanausschnittes in Abschnitt 1. Der folgende Abschnitt zeigt eine schöne Anwendung des bisher Gezeigten. Wieder geht es um die Bestimmung von Ortskoordinaten, von Vektoren von einem Punkt zu einem anderen und ihre Längen.

5.2. Der Satz von NAPOLEON

Satz 2 Die Umkreismittelpunkte der aufgesetzten Dreiecke BCE , ACF und ABG bilden ein gleichseitiges Dreieck.⁴

Der Beweis in der uvw -Sprache sei den Lesern und Leserinnen als Übungsaufgabe überlassen.

5.3. Die Kür: Der FERMAT-Punkt

Es pfeifen ja schon die Spatzen vom Dach: Die Ecktransversalen AE , BF und CG inzidieren, man sieht das in den Abb. 18 auf der vorherigen Seite, Abb. 20 und Abb. 21 auf der nächsten Seite. Das ist der FERMAT-Punkt⁵. Auch er kann mit Hilfe der uvw -Sprache beschrieben werden, die Rechnungen sind allerdings ein wenig komplexer als jene in den bisherigen Abschnitten. Der Einsatz eines CAS empfiehlt sich hier also dringend und ist wohlbegründet.

Wir schneiden die Ecktransversalen AE und CG (mit Hilfe eines CAS und Abb. 20) und erhalten die Koordinaten des Schnittpunkts P :

$$x_P = \frac{w(v^2 - u^2) + \sqrt{3} \cdot (u^2v + uv^2 + uw^2 + vw^2)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)}$$

$$y_P = \frac{3uv(u - v) + \sqrt{3}w(v - u)^2 + w^2(v - u)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)} \quad (1)$$

Bevor wir nun den Schnittpunkt der Ecktransversalen BF und CG bestimmen, greifen wir zu einem algebraischen Trick: Wir vertauschen die Variablen u und v und setzen statt dem Wert $\sqrt{3}$ sein negatives Pendant $-\sqrt{3}$. Was passiert dann? Aus dem Eckpunkt A wird der Eckpunkt B , der Eckpunkt C ändert sich nicht. Die Spitze E mutiert zur Spitze F , während die Spitze G durch diese Transformation nicht

⁴ NAPOLEON BONAPARTE (1769 – 1821)

⁵ PIERRE DE FERMAT (1607 – 1665)

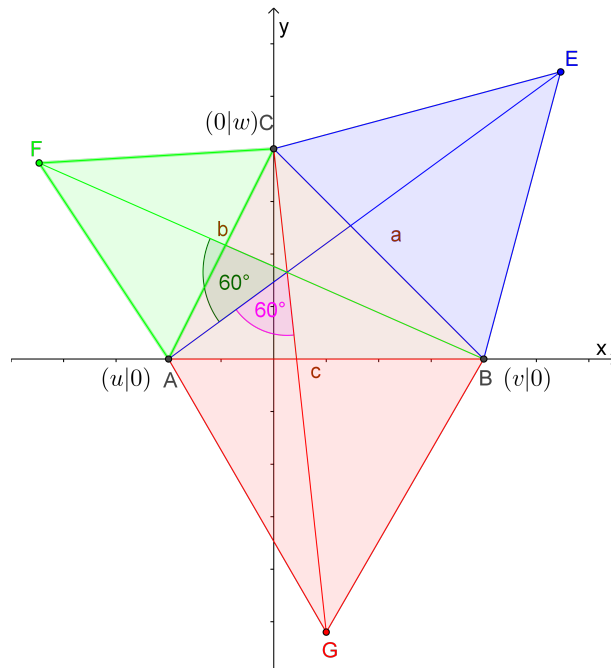


Abb. 21: Die Winkel zwischen den Ecktransversalen sind gleich und konstant

berührt wird (vgl. Abb. 20 auf der vorherigen Seite). Die Koordinaten des Schnittpunkts P bleiben auch unverändert: Gleichungen (1). Das heißt die Berechnung des Schnittpunkts der Ecktransversalen BF mit der Ecktransversalen CG entspricht formal der Berechnung des Schnittpunkts der Ecktransversalen AE mit der Ecktransversalen CG nach der eben eingeführten Transformation. Seine Koordinaten sind also ebenfalls durch die Gleichungen (1) gegeben. Insgesamt ist damit die Existenz des FERMAT-Punkts in der uvw -Sprache bewiesen.

Eine Eigenschaft des FERMAT-Punktes P zeigt Abb. 22 auf der nächsten Seite. Man sieht, dass P auf dem Umkreis des Dreiecks BCE liegt. Mittels DGS kann diese Beobachtung zu einer Vermutung erhärtet werden. Der Radius des Umkreises ist

$$r = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{v^2 + w^2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{v^2 + w^2}{3}} \quad \text{und} \quad r^2 = \frac{v^2 + w^2}{3}.$$

Wir vergleichen diesen Term mit dem Abstandsquadrat $|\overrightarrow{U_a P}|^2$, wobei U_a der Umkreismittelpunkt des Dreiecks BCE ist. Seine Koordinaten sind $\left(\frac{3v + \sqrt{3}w}{6} \mid \frac{3w + \sqrt{3}v}{6}\right)$ (diese werden z. B. im Zuge der Begründung des Satzes von NAPOLEON berechnet: Abschnitt 5.2.). Es ist also der Ausdruck [vgl. Gleichungen (1)]

$$\left(\frac{w(v^2 - u^2) + \sqrt{3}(u^2v + uv^2 + uw^2 + vw^2)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)} - \frac{3v + \sqrt{3}w}{6}\right)^2 + \left(\frac{3uv(u - v) + \sqrt{3}w(v - u)^2 + w^2(v - u)}{6vw - 6uw + 2\sqrt{3} \cdot (u^2 + v^2 + w^2 - uv)} - \frac{3w + \sqrt{3}v}{6}\right)^2$$

zu vereinfachen. MATHEMATICA schafft das mit dem FullSimplify-Befehl!

Elementargeometrisch schaffen wir das auch: Abb. 22 auf der nächsten Seite zeigt, dass das Viereck $PBEC$ ein Sehnenviereck ist. Der Winkel CPB beträgt 120° nach der Rechnung in Abschnitt 5.1., und der Winkel BEC ist 60° wegen der zugrunde liegenden Konstruktion in diesem Abschnitt (gleichseitige Aufsatzdreiecke).

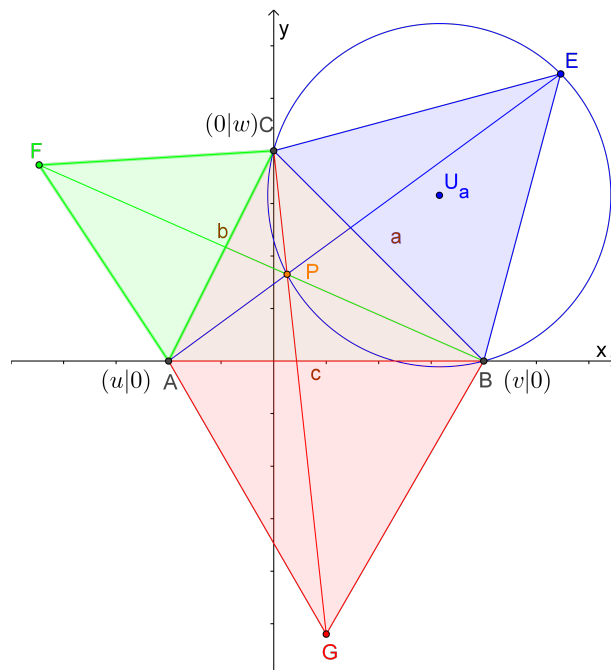


Abb. 22: P liegt auf dem Umkreis eines Aufsatzdreieckes

Allerdings kaufen wir uns auf diese Weise Fallunterscheidungen ein. Ist ein Innenwinkel des Dreiecks gleich 120° , dann liegen zwei Ecktransversalen auf zwei Dreiecksseiten: In Abb. 23 auf der nächsten Seite oben ist $\gamma = 120^\circ$ und AE ist auf b und BF auf a . Der FERMAT-Punkt P stimmt dann mit dem Eckpunkt C überein. Aus dem Sehnenviereck wird das gleichseitige Aufsatzdreieck BCE , welches natürlich einen Umkreis besitzt.

Ist $\gamma > 120^\circ$ wie in Abb. 23 auf der nächsten Seite unten, dann wird die Sehne BE des in Rede stehenden Umkreises sowohl von P (Resultat in Abschnitt 5.1.) als auch von C (wegen der zugrundeliegenden Konstruktion) unter dem Winkel von 60° gesehen. Nach der Umkehr des Peripheriewinkelsatzes müssen P und C daher auf dem Umkreis liegen (Reichel & Humenberger (2012), S. 237).

Analog kann man zeigen, dass P auf dem Umkreis des aufgesetzten Dreiecks ACF und auf dem Umkreis des ebenfalls aufgesetzten Dreiecks ABG liegt.

Schlussbemerkung: Für die Rechnung in der uvw -Sprache ist diese Fallunterscheidung nicht von Belang, das algebraische Kalkül berücksichtigt alle drei Fälle. Ob allerdings die Einsicht in den elementargeometrischen Beweis tiefer ist als die Überzeugungskraft der Rechnung, möge der Leser bzw. die Leserin selbst entscheiden.

Literatur

Willibald Dörfler. *Die Rolle der Zeichen beim Lernen von Mathematik. Gedanken im Anschluss an PEIRCE und WITTGENSTEIN*. Vortrag am 15. Jänner 2015 im Rahmen des Kolloquiums LehrerInnenbildung am Zentrum für LehrerInnenbildung der Universität Wien.

Anna Maria Fraedrich. *Die Satzgruppe des PYTHAGORAS*. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Band 29. B·I·Wissenschaftsverlag. Mannheim u. a. (1994).

Stefan Götz. Ein einfacher Zugang zu LEMOINE's Problem — Gleichseitige Dreiecke als Aufsatzfiguren. In: *R&E-SOURCE*, Nr. 7 (2017), 15 S. Online:

<https://journal.ph-noe.ac.at/index.php/resource/article/view/398> (Zugriff: 02.11.2017)

Stefan Götz und Franz Hofbauer. Geraden, Kreise und Dreiecke: Vorschläge zur Orientierung, Manifestierung und Erkundung (in) einer elementargeometrischen Landschaft. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis*

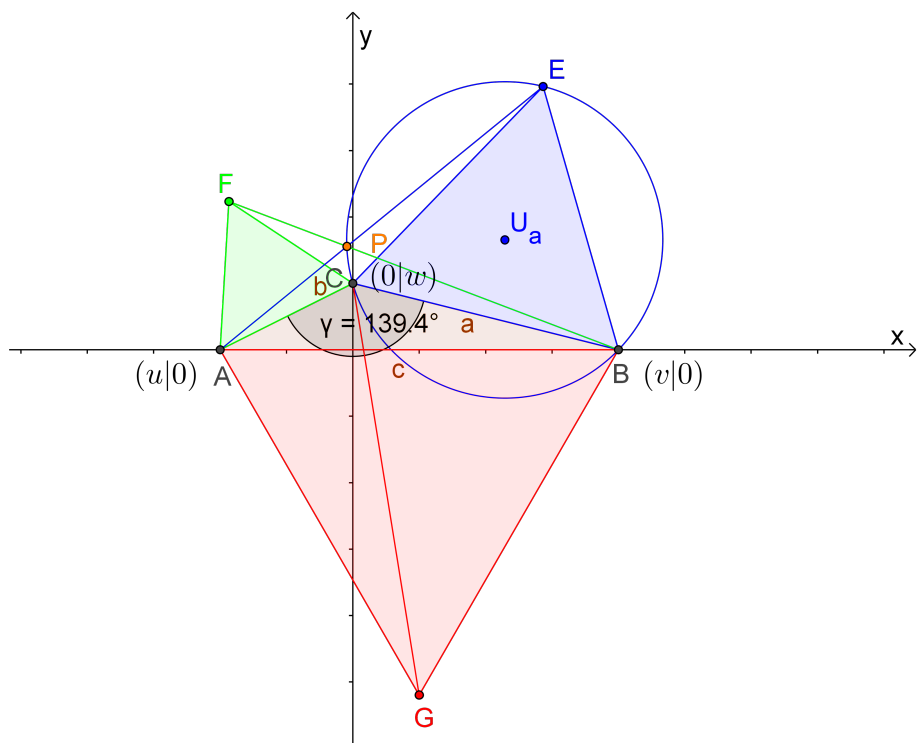
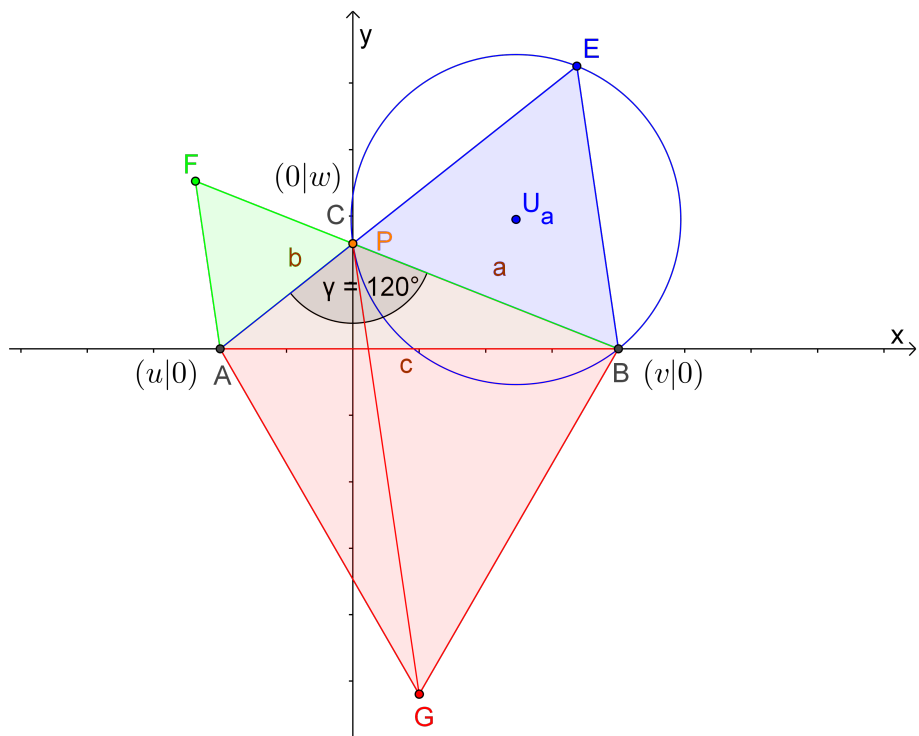


Abb. 23: Zwei Fallunterscheidungen

- 09.03.2012 in Weingarten. Für die GDM herausgegeben von Matthias Ludwig und Michael Kleine. Band 1. WTM. Münster (2012), 325–328. Online:
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2012/files/BzMU12_0166.Goetz.pdf (Zugriff: 02.11.2017)
- Stefan Götz und Hans-Christian Reichel (Hrsg.). *Mathematik 5* von R. Müller und G. Hanisch. öbv. Wien (2010a).
- Stefan Götz und Hans-Christian Reichel (Hrsg.). *Mathematik 6* von R. Müller und G. Hanisch. öbv. Wien (2010b).
- Stefan Götz und Hans-Christian Reichel (Hrsg.). *Mathematik 8* von R. Müller und G. Hanisch. öbv. Wien (2013).
- Stefan Götz und Evelyn Süß-Stepancik. Die *uvw*-Sprache in der analytischen Geometrie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015. Vorträge auf der 49. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 09.02.2015 bis 13.02.2015 in Basel*. Für die GDM herausgegeben von: Franco Caluori, Helmut Linneweber-Lammerskitten und Christine Streit. Band 1. WTM. Münster (2015), 312–315. Online:
https://eldorado.tu-dortmund.de/bitstream/2003/34587/1/BzMU15.Goetz_UVWSprache.pdf (Zugriff: 02.11.2017)
- Wilfried Herget. Funktionen — immer wieder überraschend! In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013. Vorträge auf der 47. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 04.03.2013 bis 08.03.2013 in Münster*. Für die GDM herausgegeben von Gilbert Greefrath, Friedhelm Käpnick und Martin Stein. Band 1. WTM. Münster (2013), 464–467. Online:
<http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/bzmu2013/Einzelvortraege/BzMU13-Herget.pdf> (Zugriff: 02.11.2017)
- Siegfried Krauter. *Erlebnis Elementargeometrie. Ein Arbeitsbuch zum selbstständigen und aktiven Entdecken*. Elsevier Spektrum Akademischer Verlag, München (2005).
- Robert Müller. Forschen-Entdecken-Verifizieren-Beweisen mit dynamischer Geometrie. Gedanken ÜBER Grundkompetenzen. In: *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG)*. Heft 46 (2013), 43–51. Online:
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2013%20Band%2046/VortragMuellerR.pdf> (Zugriff: 02.11.2017)
- Georg Pólya. *Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren*. Band I. Birkhäuser. Basel und Stuttgart (1966).
- Hans-Christian Reichel und Hans Humenberger (Hrsg.). *Das ist Mathematik 4. Lehrbuch und Aufgabensammlung für die 4. Klasse der allgemein bildenden höheren Schulen und der Hauptschulen* von D. Litschauer, H. Groß, V. Aue und E. Neuwirth. öbv. Wien (2012).
- Erich Ch. Wittmann. *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Vieweg+Teubner. Wiesbaden (2009) (6., neu bearbeitete Auflage).

Anschrift des Verfassers

Stefan Götz
 Fakultät für Mathematik
 Universität Wien
 Oskar-Morgenstern-Platz 1
 A-1090 Wien
 stefan.goetz@univie.ac.at